MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM PÊNDULO SIMPLES UTILIZANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

SILVA, L.D.C.[1]; MATOS, G.A.M.[2]; LOYOLA, R. R.[2]; SANTANA, N.B.[4]

[1]Discente do curso superior Lic. Em Física do IFNMG - Campus Salinas; [2]Discente do curso superior Lic. Em Física do IFNMG - Campus Salinas; [3]Docente do IFNMG - Campus Salinas.

Introdução

O estudo das equações diferenciais chamou a atenção dos maiores matemáticos do mundo durante muitos séculos. Essas equações são usadas para investigar uma grande variedade de problemas na Engenharia, Química, Biologia e tem aplicações diretas na Física. Além disso, fazem parte do currículo educacional de muitas outras áreas. A utilização de equações diferenciais como ferramenta que proporciona a modelagem matemática de problemas físicos que replicam a realidade é comumente observado nos fenômenos físicos mais simples, como em um pêndulo. VEIT (2002) afirma que a Segunda Lei de Newton é um dos focos centrais de qualquer curso introdutório de Mecânica. Utilizando as equações diferenciais, é possível desenvolver a segunda lei de Newton para um pêndulo simples. A modelagem matemática de uma equação diferencial facilita a identificação e quantificação de grandezas variáveis, facilitando o cálculo de tais variáveis, assim tornando aproximado os valores obtidos matematicamente com os valores de problemas reais, que de acordo com (BATISTA; MOZOLEVSKI, 2010), os métodos numéricos envolvem a transformação do sistema contínuo descrito por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) em um sistema discreto, cuja equação equivalente é uma equação algébrica, tornando-o mais fácil de tratar. O desenvolvimento no estudo de equações diferenciais foi paralelo com a Física, pois com base no cálculo, foi realizado o estudo da mecânica newtoniana, movimento ondulatório e eletromagnetismo, posteriormente utilizado na mecânica quântica e teoria da relatividade. "Desse modo, pudemos entender que apesar da natureza dos sistemas físicos, ser em sua maior parte imprevisível e aleatória, ainda surgem propriedades regulares, e ordem, até mesmo nos sistemas mais complexos" (MASCENA, 2021). A utilização se estende para outras áreas e se aplica em estudos de dinâmica de populações, propagação de epidemias, datação por carbono radioativo, a exploração de recursos renováveis e a competição entre espécies como, por exemplo, no sistema presa-predador (equações de Lotka-Volterra). Também pode-se observar aplicações na economia, comércio, dentre outras, tornando de extrema importância o estudo e desenvolvimento de modelagem matemática de sistemas através de equações diferenciais para facilitar o entendimento de questões do mundo real com aplicações de áreas de estudo diversificadas. Equações diferenciais são classificadas de acordo com tipo, ordem e linearidade, um estudo detalhado destas equações pode ser visto em (BOYCE, DIPRIMA, 2009).

Material e Métodos

Considere um pêndulo simples feito por uma massa (m) pendurada na extremidade de uma corda de comprimento (L) que oscila de um lado para o outro com o ponto de equilíbrio em $X = 0$, conforme figura 1. Afastando-se a massa (m) do ponto de equilíbrio até um ponto X, terá um ângulo (β) formado entre a corda no ponto x e em seu ponto de equilíbrio, e, tendo uma massa (m) pendurada nesta corda, tem-se também uma força de tração $\left(F_T\right)$ sendo feita nesta corda juntamente com a força peso (P). Ao decompor o vetor da força de tração, obtém-se:

$$F_{T_y} = F_T \cos(\beta) \text{ e } F_{T_x} = F_T \mathrm{sen}(\beta) \tag{1}$$

E a força peso é dada pela relação $P = mg$, onde (g) é a aceleração gravitacional. A partir da segunda e da terceira lei de Newton, podemos encontrar uma equação que rege o movimento desse pêndulo. Aplicando a segunda lei de Newton, ($F_R = ma$), temos que

$$F_T \cos(\beta) - mg = ma \tag{2}$$

Pelo fato de $F_T \mathrm{sen}(\beta)$ ser uma força restauradora que aponta sempre para o sentido oposto ao do movimento do pêndulo, é colocado o sinal de (-), então:

$$F_T \mathrm{sen}(\beta) = mg \tag{3}$$

Pela série de Taylor, pode-se observar que $\mathrm{sen}\beta \approx \beta$ e $\cos\beta \approx 1$, para $|\beta| < 1$, tomando isso como princípio, esse pêndulo terá um movimento desprezível no eixo Y. Sendo assim, da equação (2) tem-se $F_T - mg = 0$, donde

$$F_T = mg \tag{4}$$

Tendo agora que a aceleração (a) é a segunda derivada do deslocamento (X), pode-se escrever que: $a = X''$, e da equação (3) tem-se:

$$-F_T \mathrm{sen}(\beta) = mX'' \tag{5}$$

Pela figura 1, tem-se o triângulo de lados X e F_T e hipotenusa L, cujo sen(β) é dado por:

$$\mathrm{sen}(\beta) = \frac{X}{L}$$

e, da equação 3, temos que $-mg\frac{X}{L} = mX'' \Rightarrow mX'' + mg\frac{X}{L} = 0$. Colocando m em evidência, temos que

$$m\left[X'' + \left(\frac{g}{L}\right)X\right] = 0 \tag{6}$$

Existe na (Eq. 6) uma multiplicação entre dois termos cujo resultado é 0, e para que as condições físicas sejam verdadeiras, $m \neq 0$, então:

$$X'' + \left(\frac{g}{L}\right)X = 0 \tag{7}$$

E isto é, uma equação diferencial de ordem 2, cuja solução é uma função de outra variável (t).

$$X(t) = A\cos(\Omega t + c) \tag{8}$$

onde A é uma constante e $\Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Neste tipo de movimento, o deslocamento X da partícula em relação à origem, é dada pela (equação 8). Esta é a equação do Movimento Harmônico Simples, conhecido no campo da física como MHS.

Resultados e Discussão

Diante das dificuldades em compreender cálculos e equações físicas, o seu entendimento fica mais simples quando deduzidas pelas equações diferenciais. O pêndulo simples é apenas um modelo de um problema físico dentre uma infinidade de outros problemas relacionados a equações diferenciais. Pode-se dizer que grande parte das equações apresentadas na física do ensino médio vêm de deduções diferenciais como a apresentada neste artigo, apresentar apenas a equação final não proporciona ao aluno total entendimento da origem das equações, diante disso existem formas de dedução a partir de outras fórmulas apresentadas ao nível médio. Conclui-se então que as equações diferenciais são importantes para a modelagem matemática

Referências

VEIT, Eliane Angela; MORS, Paulo Machado; TEODORO, Vitor Duarte. **Ilustrando a segunda lei de Newton no século XXI**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 24, p. 176-184, 2002.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

DOS SANTOS, C. O. **Equações diferenciais**: Modelagem de problemas. Capivari de Baixo, SC: FUCAP, 2015

HALLIDAY, D. RESNICK, R. WALKER, J. **Fundamentos de Física. Volume 2**: Gravitação, Ondas e Termodinâmica. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

Figura 1 - Esquema de pêndulo simples